KAP. 7/12

LINEÁRNÍ FUNKCE

YESIT.CZ
MILAN MROCZKOWSKI

Příklad: Zakresli graf funkce $f: y = -3x + 1$.

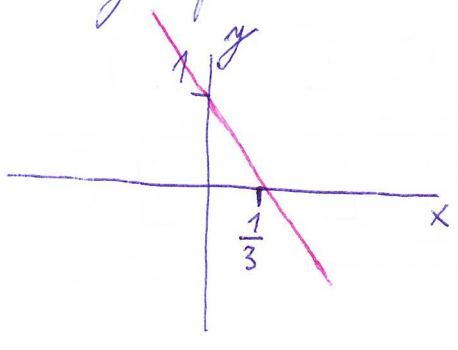
Dosadím za y nulu. $y = 0$

$$0 = -3x + 1 \quad /+3x$$
$$3x = 1 \quad /:3$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Dosadím za x nulu. $x = 0$

$$y = -3 \cdot 0 + 1$$
$$y = 1$$

Proč je funkce klesající? $y = -3x + 1$.



$P_y\ [0, 1]$ průsečík s osou y

$P_x\ [\frac{1}{3}, 0]$ průsečík s osou x

$$\boxed{y = ax + b}$$

Příklad: $f: y = \frac{1}{2}x - 2$

Dosadím za y nulu. $y = 0$, zjišťuji průsečík x.

$$0 = \frac{1}{2}x - 2 \quad / -\frac{1}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}x = -2 \quad / \cdot(-1)$$

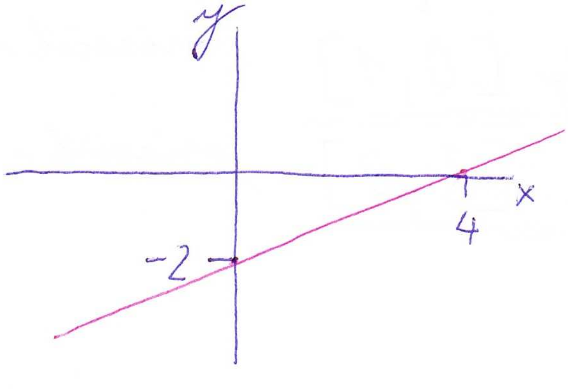
$$\frac{1}{2}x = 2 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x = 4$$

Dosadím za x nulu. $x = 0$, zjišťuji průsečík y.

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 - 2$$

$$y = -2$$



$P_y\ [0, -2]$

$P_x\ [4, 0]$

NAČRTNĚTE GRAFY LINEÁRNÍCH FUNKCÍ (URČETE A OZNAČTE PRŮSEČÍKY S OSAMI)

Příklad:

$$f: y = 2x + 2$$

Dosadím za y nula $y = 0$ pro průsečík s osou x.

$$0 = 2x + 2 \quad /-2x$$

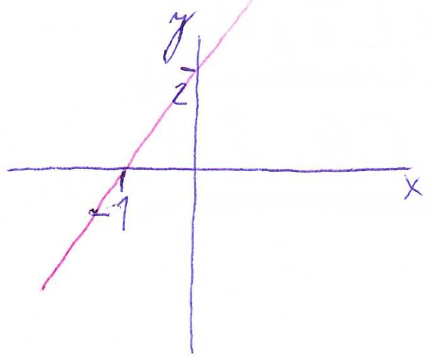
$$-2x = 2 \quad /:2$$

$$x = -1$$

Dosadím za x nula $x = 0$ pro průsečík s osou y.

$$y = 2 \cdot 0 + 2$$

$$y = 2$$



$P_x\,[-1,0]$

$P_y\,[0,2]$

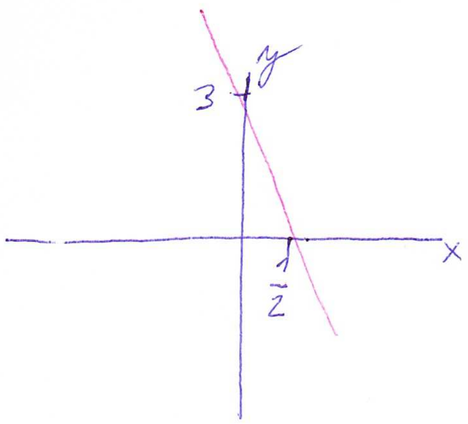
Příklad: $g: y = -6x + 3$

Dosadím za y nula $y = 0$ pro průsečík s osou x.

$$0 = -6x + 3 \qquad / + 6x$$
$$6x = 3 \qquad / : 6$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Dosadím za x nula $x = 0$ pro průsečík s osou y.

$$y = -6 \cdot 0 + 3$$
$$y = 3$$



$P_x\left[\frac{1}{2}, 0\right]$

$P_y[0, 3]$

VYŘEŠTE SOUSTAVU DVOU LINEÁRNÍCH ROVNIC GRAFICKY

ZADÁNÍ

$$\boxed{\begin{aligned} -x+y&=2 \\ 2x+y&=1 \end{aligned}}$$

a) Chci dostat tvar obecně: $y = ax + b$

$$-x + y = 2 \quad /+x$$
$$2x + y = 1 \quad /-2x$$

$$y = x + 2$$
$$y = -2x + 1$$

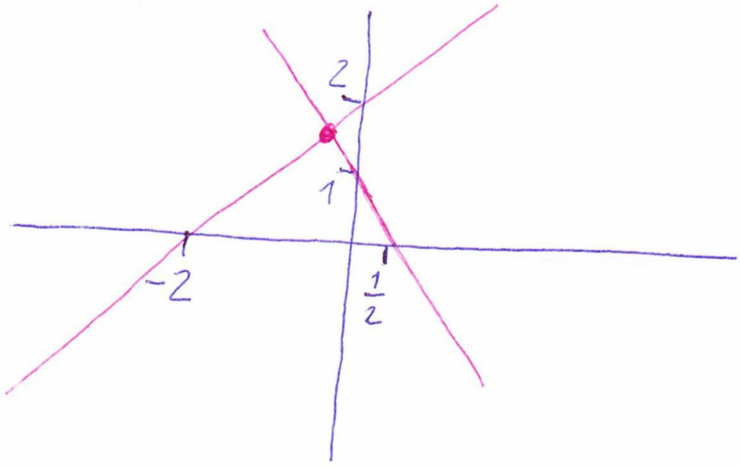
b) Vyřeším první $y = x + 2$

$$0 = x + 2 \quad /-x$$
$$-x = 2 \quad /\cdot(-1) \qquad P_x[-2, 0]$$
$$x = -2$$

$$y = 0 + 2 \qquad P_y[0, 2]$$
$$y = 2$$

c) Vyřeším druhou $y = -2x + 1$

$$0 = -2x + 1 \quad /+2x$$
$$2x = 1 \quad /:2 \qquad P_x[\tfrac{1}{2}, 0]$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$y = -2\cdot 0 + 1 \qquad P_y[0, 1]$$
$$y = 1$$



Mohu napsat zhruba souřadnice, lépe pomůže milimetrový papír.

Jejich průsečík je to samé, jako kořen této rovnice.

Nechci odhadovat souřadnice průsečíku (kořen této rovnice), spočítám to.

$$-x + y = 2 \quad / \cdot 2$$
$$2x + y = 1$$

$$-2x + 2y = 4$$
$$2x + y = 1 \quad / +$$

$$3y = 5 \quad / : 3$$
$$y = \frac{5}{3}$$

$$K = \left\{[x, y] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]\right\}$$

$$-x + y = 2$$
$$-x + \frac{5}{3} = 2 \quad / -\frac{5}{3}$$
$$-x = \frac{2}{1} - \frac{5}{3}$$
$$-x = \frac{6-5}{3}$$
$$-x = \frac{1}{3} \quad / \cdot (-1)$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

ZKOUŠKA:

$L_1 = -\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+5}{3} = 2$

$P_1 = 2$

$L_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{-2+5}{3} = \frac{3}{3} = 1$

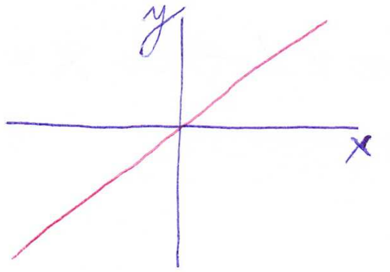
$P_2 = 1$

$L_1 = P_1 \wedge L_2 = P_2$

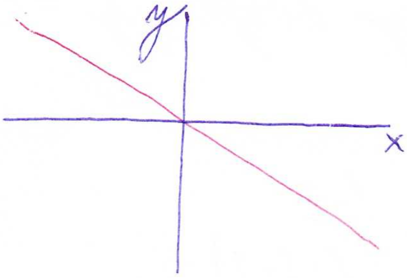
SESTROJTE GRAFY LINEÁRNÍCH FUNKCÍ

- náčrty

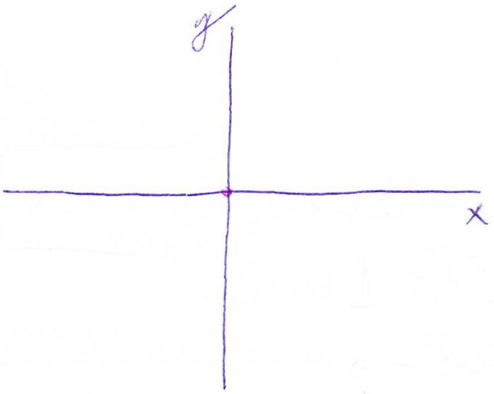
a) $f: y = x$



b) $f: y = -x$



c) $f: y = 3x$



aby se mi lépe počítalo

$\Rightarrow \quad y = 3x \quad / -3x$

$y - 3x = 0$

Když dosadím za x nulu $x = 0$.

$y - 3x = 0$

$y - 3 \cdot 0 = 0$

$y = 0 \qquad P_y [0, 0]$

Když dosadím za y nulu $y = 0$.

$y - 3x = 0$

$0 - 3x = 0$

$-3x = 0 \qquad / \cdot (-1)$

$3x = 0 \qquad / : 3$

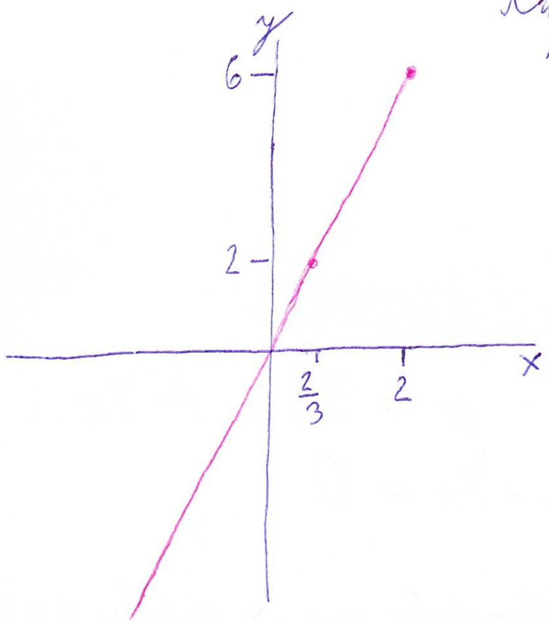
$x = 0 \qquad P_x [0, 0]$

Dosazením nuly je nyní k ničemu",
proto dosadím jiné číslo, například 2.

Když dosadím za x dvojku $x = 2$.

$$y - 3x = 0$$
$$y - 3 \cdot 2 = 0$$
$$y - 6 = 0 \quad / +6$$
$$y = 6 \qquad P_y\,[2, 6]$$

Když dosadím za y dvojku $y = 2$.

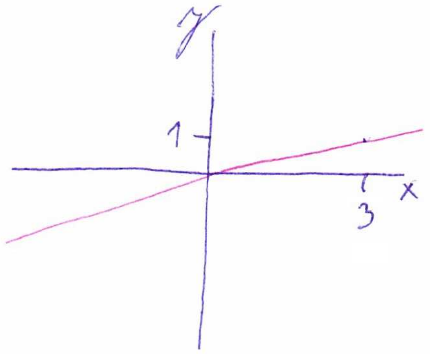


$$y - 3x = 0$$
$$2 - 3x = 0 \quad / -2$$
$$-3x = -2 \quad / \cdot(-1)$$
$$3x = 2 \quad / :3$$
$$x = \frac{2}{3} \qquad P_x\left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

Pro tuto funkci $f: y = 3x$, která má „tvar" $\boxed{y = ax}$
je podstatné: MÁ VŽDY PRŮSEČÍK [0,0].
a - mění sklon k osám; je to znaménko → mění monotónnost
+x - rostoucí
−x - klesající

d) $f: y = \frac{1}{3}x$

ZNOVU JE PODLE $y = ax$



dosadím: $f(3)$

$y = \frac{1}{3}x$

$y = \frac{1}{3} \cdot 3$

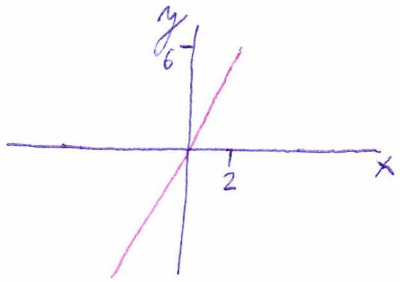
$y = 1$

$P_y [3, 1]$

Opakování příkladu c):

$f: y = 3x$

ZNOVU PODLE $y = ax$



dosadím $f(2)$

$y = 3x$

$y = 3 \cdot 2$

$y = 6$

$P_y [2, 6]$

e) $f: y = x + 2$

$\boxed{y = ax + b}$

b – mění průsečíky

TAKHLE MÁM DVA PRŮSEČÍKY

Dosadím za y nulu $y = 0$.

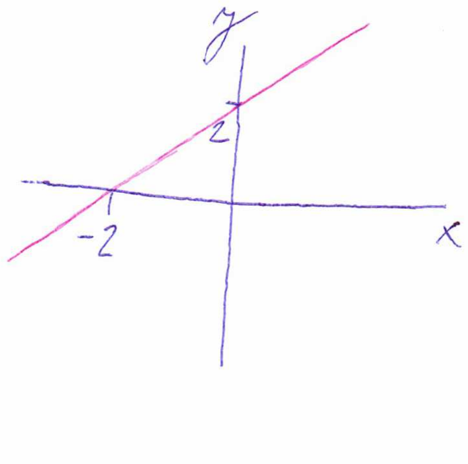
$$y = x + 2$$
$$0 = x + 2 \quad / -x$$
$$-x = 2 \quad / \cdot (-1)$$
$$x = -2$$

$P_x [-2, 0]$

Dosadím za x nulu $x = 0$.

$$y = x + 2$$
$$y = 0 + 2$$
$$y = 2$$

$P_y [0, 2]$



f)

$f: y = x + \frac{1}{2}$

Dosadím $x = 0$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$P_y\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Dosadím $y = 0$

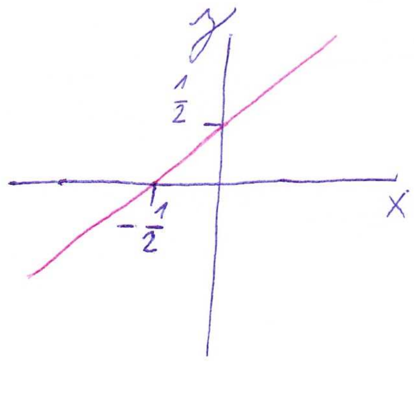
$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$0 = x + \frac{1}{2} \quad / - x$$

$$-x = \frac{1}{2} \quad / \cdot (-1)$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$P_x\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$



g)

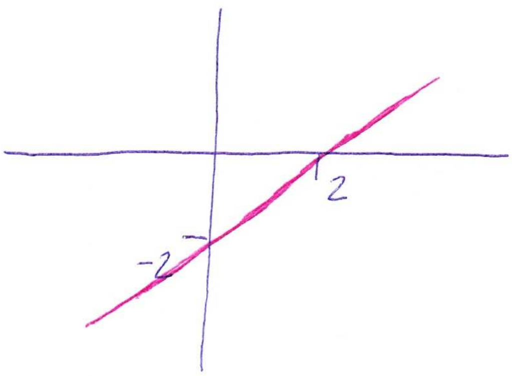
$$y = x - 2$$

Dosadím $x = 0$.

$$y = x - 2$$
$$y = 0 - 2$$
$$y = -2 \qquad P_y[0, -2]$$

Dosadím $y = 0$.

$$y = x - 2$$
$$0 = x - 2 \quad / -x$$
$$-x = -2 \quad / \cdot(-1)$$
$$x = 2 \qquad P_x[2, 0]$$



KVADRATICKÉ FUNKCE

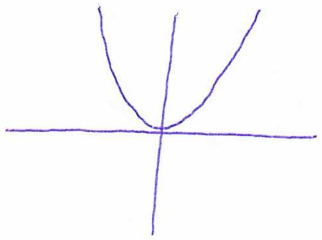
ZADÁNÍ: $y=(x-2)^2-1$

Poznámka: když roznásobíme závorku, tak dostaneme x^2.

Úvahy:

1) Podle čeho určím minimum či maximum?

podle x^2 → minimum



$y=ax^2$

Když se mění parametr a, tak se mění tvar paraboly

+x konvexní ∪

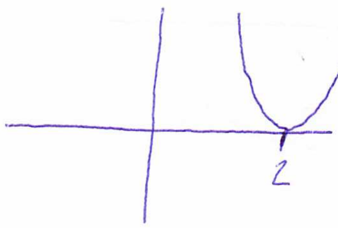
−x konkávní ∩

"kávu nenaliješ"

2) Co provede −2 s grafem?

znaménko − posun doprava ⇒ MĚNÍ ⟷

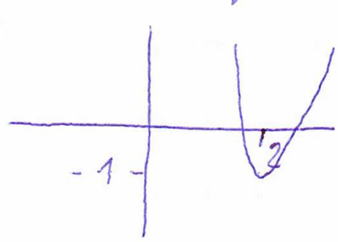
$y=(x-b)^2$



3) Máme tady −1, v jakém směru se bude měnit?

MĚNÍ ↕

$y=x^2+c$



4) Kde bude mít průsečíky?

a) chci mít průsečík s osou y, tak za x dosadím nulu: $x=0$

$y=(0-2)^2-1$ $\qquad P_y[0,3]$

$y=3$

b) chci mít průsečík s osou x, tak za y dosadím nulu: $y=0$

$0=(x-2)^2-1$

$0=x^2-4x+4-1$

$0=x^2-4x+3$ Nyní vypočítám kořeny.

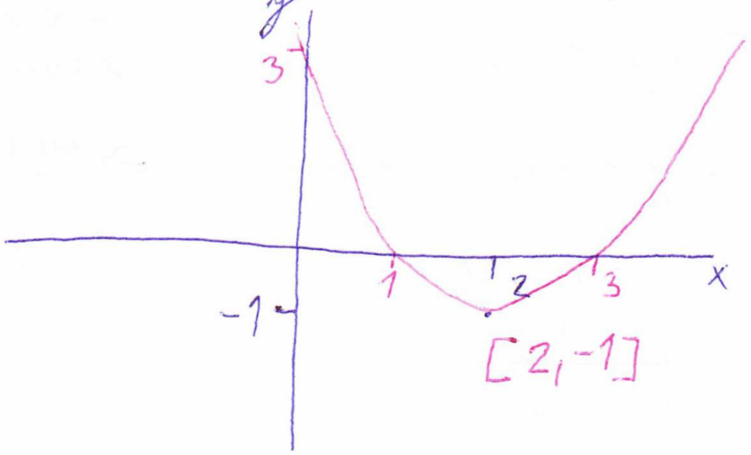
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Kořeny 3 a 1 jsou průsečíky na ose x.



Poznámka: Když se mění hodnota pod mocninou, co se děje s funkcí? Mění se osové souřadnice vrcholu - posouvá se do prava a do leva, a to jen v případě, že to je celé na druhou. Tedy: celé pod mocninou = směr do leva a do prava.

Jestli je to x^2 plus něco, tak se nám změní celé nahoru a dolů, např.: $x^2 + 3$, posune se o 3 nahoru.

Sestroj graf $y = x^2 - 2x + 3$

Poznámka: Potřebuji souřadnice vrcholu.
Potřebuji zjistit kde a zda má průsečíky.
(má průsečík s osou y vždy)

Provedu úpravu, které se říká ÚPRAVA NA ČTVEREC

Jak ji provedu?

Opakování: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

úprava na čtverec

$x^2 - 2x \quad +3$

tento člen je pro nás $-2ab$.

$$\Downarrow$$

$(x-1)^2$

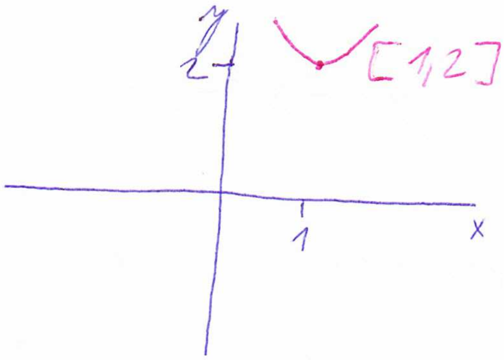
Když $(x-1)^2$ rozložím, tak dostanu x^2-2x+1, což se liší od x^2-2x, proto jedničku odečtu.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left[(x-1)^2 - 1\right] \qquad + 3}$$

$$\boxed{y = (x-1)^2 + 2}$$

Z toho již poznám jaké jsou souřadnice vrcholu [1, 2].



Bude mít minimum nebo maximum parabola?

minimum

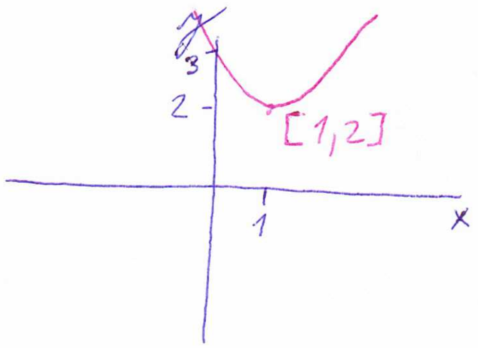
Nemá průsečíky s osou x, proto je počítat nemusím.

Má průsečíky s osou y:

$x = 0$

$$y = (x-1)^2 + 2$$
$$y = (0-1)^2 + 2$$
$$y = 3$$

$P_y\,[0, 3]$



Chceme graf x^2+4x+1

$(x+2)^2-4+1$

$(x+2)^2-3$

Vyčtu vrchol $[-2,-3]$

Průsečíky $x=0$

$y=(0+2)^2-3$

$y=1$ $\quad P_y\,[0,1]$

$y=0$

$0=(x+2)^2-3$

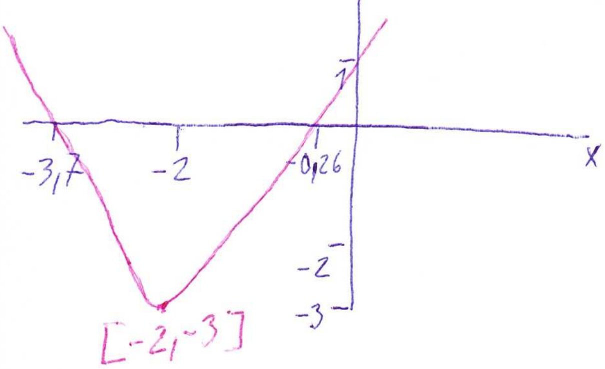
$0=x^2+4x+4-3$

$0=x^2+4x+1$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}\;\begin{cases}x_1\doteq-0{,}26\\x_2\doteq-3{,}7\end{cases}$$



Chceme graf $y = 2x^2 - 8x + 9$

! Když máme u x jinou hodnotu než 1, tak to vytknu:

$$2(x^2 - 4x) + 9$$

Upravím tak, aby celá závorka byla na druhou:

$$2(x-2)^2 - 4 \cdot 2 + 9$$

↑ protože je závorka dva krát.

$$\Downarrow$$

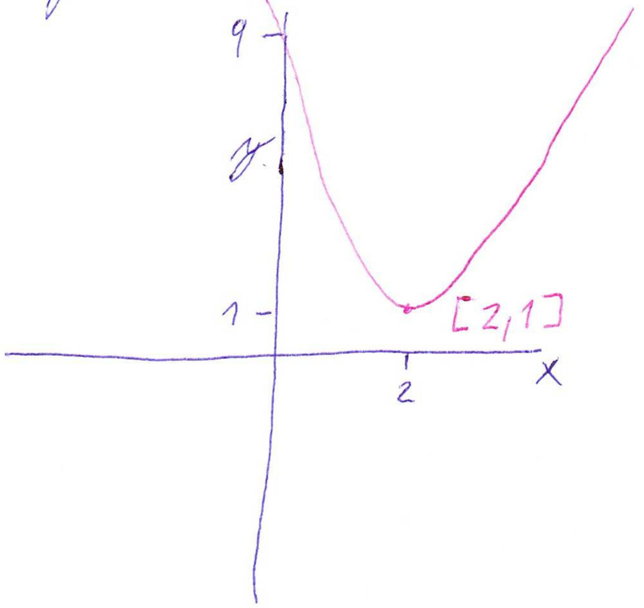
$$2(x-2)^2 + 1$$

Vyčtu souřadnice vrcholu: [2, 1]

$x = 0 \Rightarrow 2(0-2)^2 + 1 = 9$ $\quad P_y[0, 9]$

$y = 0 \Rightarrow D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9} = \underbrace{\sqrt{64-72}}_{\text{nelze odmocnit záporné číslo}}$

NEMÁ PRŮSEČÍK S OSOU X



Narýsuj graf funkce

$$y = -0{,}8x^2 + 3{,}2x - 0{,}2$$

$$-0{,}8\,(x^2 - 4x) - 0{,}2$$

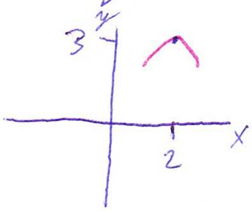
$$-0{,}8\,(x - 2)^2 - 4 \cdot (-0{,}8) - 0{,}2$$

$$-0{,}8\,(x - 2)^2 + 3{,}2 - 0{,}2$$

$$-0{,}8\,(x - 2)^2 + 3$$

- KONKÁVNÍ, když vytýkám, tak koukám i na mínus ve vytýkání. Z důvodu 0,8 tak bude pomaleji stoupat. Kdyby bylo např. 2, tak bude dvakrát rychleji stoupat.

Vrchol paraboly je [2, 3].



Průsečík s osou y, $x=0$

$$x=0 \Rightarrow -0{,}8\,(0-2)^2+3 = -3{,}2+3 = -0{,}2$$

$P_y\,[0, -0{,}2]$

Průsečík s osou x

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

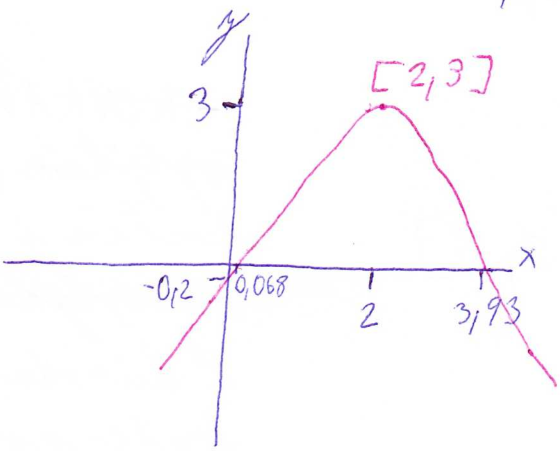
$$x_{1,2} = \frac{-3{,}2 \pm \sqrt{3{,}2^2 - 4\cdot(-0{,}8)\cdot(-0{,}2)}}{2\cdot(-0{,}8)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3{,}2 \pm \sqrt{10{,}24 - 0{,}64}}{-1{,}6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3{,}2 \pm \sqrt{9{,}6}}{-1{,}6}$$

$x_1 = 0{,}068$

$x_2 = 3{,}93$



NAČRTNĚTE GRAFY KVADRATICKÝCH FUNKCÍ (URČETE A OZNAČTE VRCHOL A PRŮSEČÍKY S OSAMI):

a) $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$

b) $g: y = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$

a) $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$

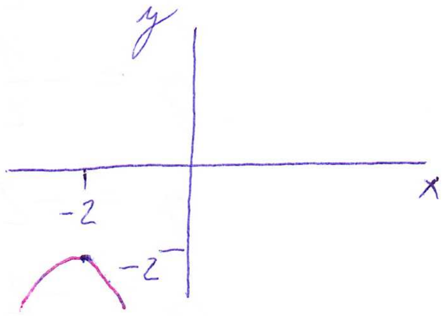
$$y = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x\right) - 4$$

$$-\frac{1}{2}\left(x + 2\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4$$

$$-\frac{1}{2}\left(x + 2\right)^2 + 2 - 4$$

$$-\frac{1}{2}\left(x + 2\right)^2 - 2$$

$[-2, -2]$ vrchol



Průsečík podle osy y:
$x = 0$

$y = -\frac{1}{2}(0+2)^2 - 2 = -4$

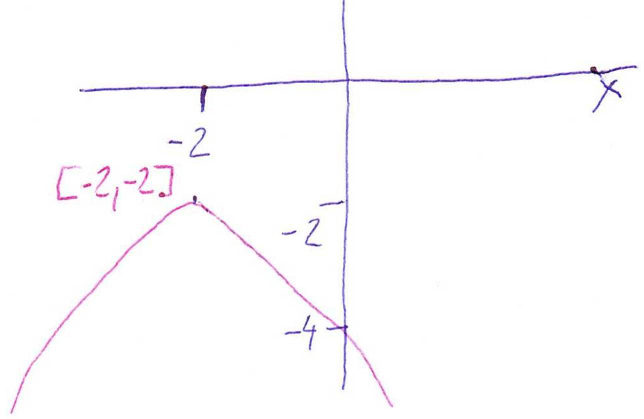
$P_y\,[0, -4]$

Je evidentní, že nebude mít průsečík podle osy x, důkaz:

$D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4)} =$

$= \sqrt{4 - 8}$ nelze odmocnit záporné číslo.

VÝSLEDEK:



PERLIČKA NAVÍC

Poznámka: Kontrola vrcholu pomocí derivace

$$f' = \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4\right)'$$

$$f' = -x - 2$$

dosadím $f' = 0$

$$0 = -x - 2 \quad / + x$$

$$\underline{x = -2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 4$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot (-2) - 4$$

$$y = -2 - (-4) - 4$$

$$y = -2 + 4 - 4$$

$$\underline{y = -2}$$

$[-2, -2]$ vrchol

b)

$y: y = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$

$\frac{3}{2}\left(x^2 - 8x\right) + 18$

$\frac{3}{2}(x-4)^2 - 16 \cdot \frac{3}{2} + 18$

$\frac{3}{2}(x-4)^2 - 24 + 18$

$\frac{3}{2}(x-4)^2 - 6$

Vrchol $[4, -6]$

Průsečík podle osy y:

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(0-4)^2 - 6$

$y = \frac{3}{2} \cdot 16 - 6$

$y = 18$ $P_y [0, 18]$

Průsečík podle osy x:

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3}{2}(x-4)^2 - 6$

$0 = \frac{3}{2}(x^2 - 8x + 16) - 6$

$0 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 24 - 6$

$0 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$

$$\frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 = 0$$

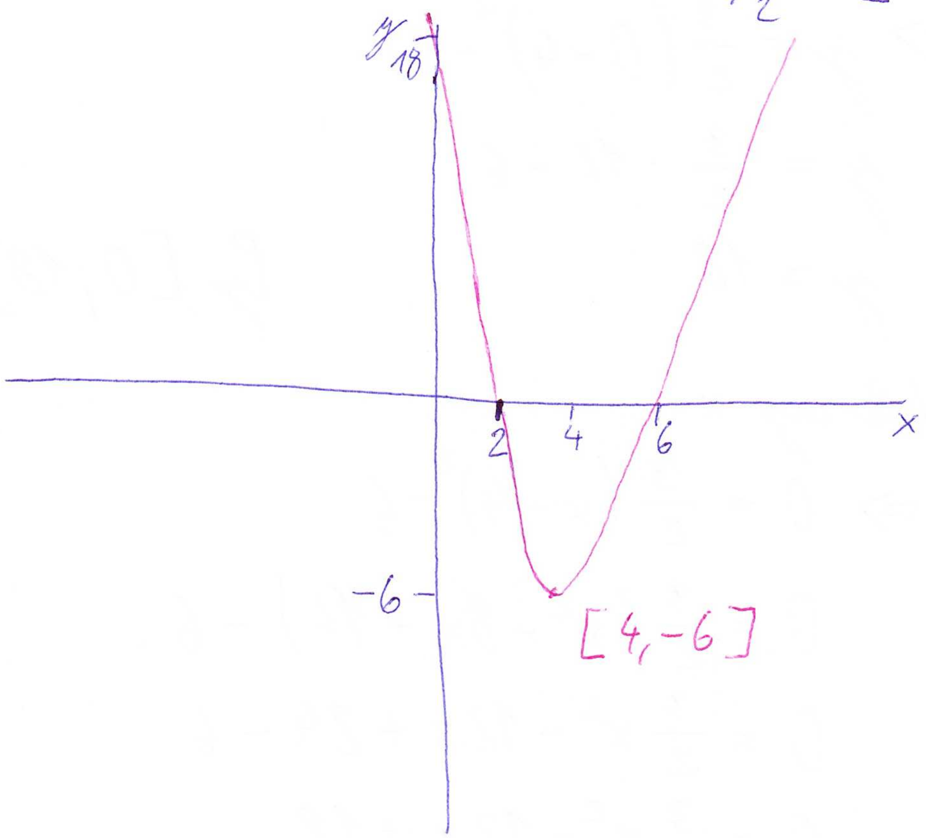
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 18}}{2 \cdot \frac{3}{2}}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 6 \cdot 18}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 6}{3} \quad \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$



P_x [2, 0]

P_x [6, 0]

SESTROJTE GRAFY KVADRATICKÝCH FUNKCÍ

náčrty

a) $y = x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = 2x^2$

d) $y = \frac{1}{2}x^2$

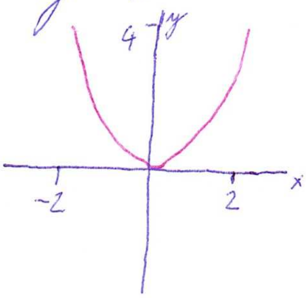
e) $y = (x-3)^2$

f) $y = (x+3)^2$

g) $y = x^2 - 3$

h) $y = x^2 + 3$

a) $y = x^2$



$y = x^2$ $\quad x = 2 \quad$ [2,4]

$y = 2^2$

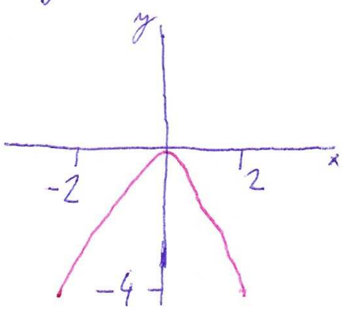
$y = 4$

$x = -2$

není nutné počítat $\left\{ \begin{array}{l} y = -2^2 \\ y = 4 \end{array} \right.$

[-2,4]

b) $y = -x^2$



$y = -x^2$ $\quad x = 2$

$y = -(2)^2$

$y = -(4)$

$y = -4$ $\quad$ [2,-4]

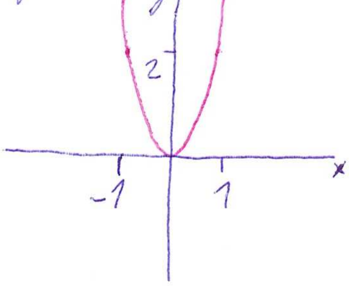
$x = -2$

$y = -(-2)^2$

$y = -(4)$ $\quad$ [-2,-4]

$y = -4$

c) $y = 2x^2$



$y = 2x^2$ $\quad x = 1 \quad$ [1,2]

$y = 2 \cdot (1)^2$

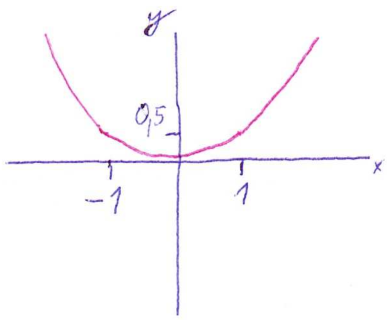
$y = 2$

$x = -1$

$y = 2 \cdot (-1)^2$ $\quad$ [-1,2]

$y = 2$

d) $y = \frac{1}{2} x^2$



$y = \frac{1}{2} x^2$

$x = 1$

$y = \frac{1}{2} \cdot (1)^2$

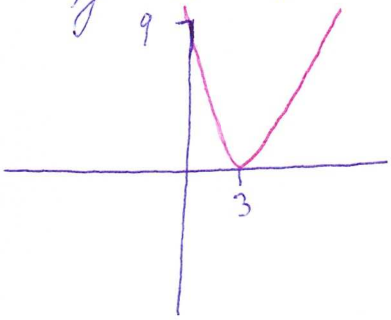
$y = \frac{1}{2}$ $[1, \frac{1}{2}]$

$x = -1$

$y = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2$

$y = \frac{1}{2}$ $[-1, \frac{1}{2}]$

e) $y = (x-3)^2$ vrchol $[3, 0]$



$y = (x-3)^2$

$x = 0$

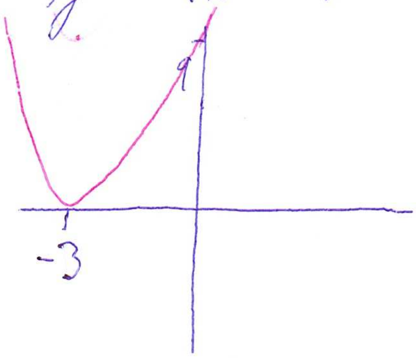
$y = x^2 - 6x + 9$

$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9$

$y = 9$ $P_y[0, 9]$

→ POSUN

f) $y = (x+3)^2$



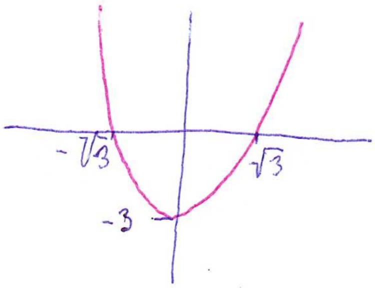
$x = 0$

$y = (0+3)^2$

$y = 9$ $\quad P_y[0, 9]$

← POSUN

g) $y = x^2 - 3$



$y = 0$

$0 = x^2 - 3 \quad / -x^2$

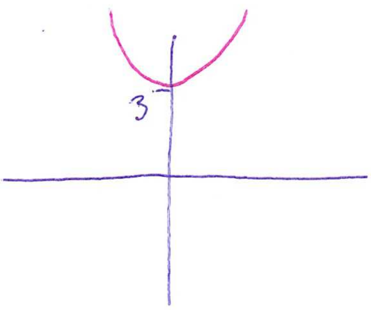
$-x^2 = -3 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

↓ POSUN

h) $y = x^2 + 3$



↑ POSUN